УДК 37.016:51
ББК Ч426.221-26+В1р ГСНТИ 14.35.07 Код ВАК 13.00.02

**Бодряков Владимир Юрьевич,**
доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики и методики обучения математике, Уральский государственный педагогический университет; 620075, г. Екатеринбург, ул. К. Либкнехта, 9; e-mail: Bodryakov_VYu@e1.ru.

**Быков Антон Александрович,**
преподаватель, Екатеринбургский автомобильно-дорожный колледж; 620062, г. Екатеринбург, ул. Ленина, 91; e-mail: bykov_antony@mail.ru.

**Ударцева Дария Анатольевна,**
студентка, Уральский государственный педагогический университет; 620075, г. Екатеринбург, ул. К. Либкнехта, 9; e-mail: Dariya.Udartseva@yandex.ru.

# КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ КАК МОТИВИРУЮЩИЙ ИНСТРУМЕНТ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: квадратичная функция; учебная мотивация; методика преподавания математики; решение задач; математические задачи; экстремальные задачи.

АННОТАЦИЯ. Построение оптимизируемых моделей реальных явлений и процессов является одной из главных задач математика-прикладника, да и вообще неравнодушного профессионала, практически в любой области человеческой деятельности. Едва ли можно переоценить важность нахождения способа получения максимальной отдачи (прибыли, выхода готовой продукции и т. п.) при минимальном расходовании почти всегда жестко ограниченных ресурсов (финансовых, человеческих, временных и др.). Не менее важно, чтобы школьный учитель и вузовский преподаватель математики умели привить вкус и сформировать устойчивые навыки решения оптимизационных задач своим ученикам. Причем последнее надо начинать делать уже в основной общей школе, где ученики часто (и нередко навсегда) теряют интерес к учебе, особенно, к математике.
Между тем, к осознанному решению задач «на максимум/минимум» обучающиеся вместе с учителем математики приходят лишь в выпускных классах, после изучения темы «Производная» и в связи с подготовкой к обязательному ЕГЭ по математике, содержащему такие задачи.
Острое противоречие между необходимостью привития обучающимся базовых навыков решения оптимизационных задач в основной общей школе и фактическим формированием у них соответствующего аналитического аппарата лишь в старшей школе, спустя два-четыре года, требует поиска эффективных путей обучения школьников решению оптимизационных задач без преждевременного использования производной.
В статье рассматривается возможность применения экстремальных свойств квадратичной функции для решения экстремальных (оптимизационных) задач без преждевременного и/или необоснованного использования производной. Найдено, что экстремальные свойства квадратичной функции не только позволяют эффективно и неформально решать достаточно сложные оптимизационные задачи, но и заметно повышают уровень мотивации обучающихся к изучению математики, в т. ч. и обучающихся гуманитарно-эстетической направленности. Педагогическое исследование с участием студентов, будущих педагогов-математиков, выявило необходимость целевого формирования у бакалавров устойчивых навыков решения «бездифференциальных» оптимизационных задач.

**Bodryakov Vladimir Yur'evich,**
Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Higher Mathematics and Methods of Teaching the Mathematics, Ural State Pedagogical University, Ekaterinburg, Russia.

**Bykov Anton Aleksandrovich,**
Teacher of Mathematics, Ekaterinburg Automobile Road College, Ekaterinburg, Russia.

**Udartseva Daria Anatolievna,**
Student, Ural State Pedagogical University, Ekaterinburg, Russia.

# QUADRATIC FUNCTION AS A MOTIVATIVE TOOL FOR SOLUTION OF THE EXTREME PROBLEMS

KEYWORDS: quadratic function; learning motivation; methods of teaching Math; problem solving; Math tasks; extreme tasks.

ABSTRACT. The construction of optimized models of real phenomena and processes is one of the main tasks of the applied mathematicians, and in general of any professional in any field of human activity. It is hardly possible to overestimate the importance of finding a way to maximize returns (profits, output of finished products, etc.) with minimal expenditure of almost always limited resources (financial, human, time, etc.). It is equally important that the school teacher and university lecturer of mathematics know how to instill taste and to form stable skills in solving optimization problems of their students. It is important to develop the skills of problem solving in secondary school where students often lose an interest in studying, especially mathematics.
Meanwhile, to the conscious solution of the problems «on the maximum / minimum» the students with their teachers come only in the graduate classes, after studying the topic «Derivative» and in connection with the preparation for the compulsory Unified State Exam in mathematics containing such tasks.
There is a sharp contradiction, as the basic skills of solving optimization problems should be formed in

secondary school, but in fact they are formed in high school only. This requires the search for effective ways of teaching students to solve optimization problems without the reference to the topic of derivative.
The possibility of applying extremal properties of a quadratic function for solving extremal (optimization) problems without unreasonable use of the derivative is considered. It is found that the extremal properties of a quadratic function not only allow efficiently solve rather complicated optimization problems, but also increase the motivation level of students to learning mathematics, including those who are of humanitarian and aesthetic orientation.
Pedagogical investigation with the participation of students — future teachers of mathematics, revealed the need for targeted formation of sustainable skills in solving «non-differential» optimization problems in Bachelor students.

## Введение

На протяжении всей жизни в той или иной ситуации мы всегда стараемся принять как можно лучшее решение, подразумевающее достижение желаемого результата с наименьшими затратами, или, наоборот, при данных затратах — получение наибольшего результата [7; 8; 12; 17; 20; 22–24]. Такое решение часто называют оптимальным. Слово «оптимальный» происходит от латинского optimus, что значит — «наилучший, совершенный». Для того чтобы найти оптимальную из возможностей, приходится решать задачи на отыскание максимума или минимума, т. е. наибольших или наименьших значений каких-либо величин. Оба эти понятия — максимум и минимум — объединяются термином «экстремум» (от латинского extremum, означающего «крайнее»). Поэтому задачи на отыскание максимума или минимума называют экстремальными задачами.

Осознанное исследование задач на максимум и минимум возникло достаточно давно, а именно около трех тысяч лет назад (например, задача финикийской царевны Дидоны (IX в. до н. э.) об охвате наибольшей площади заданным периметром и др.) [8; 20]. Экстремальные, преимущественно геометрические, задачи решали Евклид, Архимед, Аристотель и др. Длительное время не было сформулировано общих методов решения экстремальных задач, но в эпоху формирования аппарата математического анализа (XV–XVI вв.) удалось построить первые общие методы их решения, основанные на методах дифференциального исчисления (Кеплер, Ферма, Ньютон, Лейбниц, Бернулли, Лагранж, Эйлер и др.). В тот же период было найдено, что задачи на экстремум занимают чрезвычайно важное место в естествознании, так как многие движения или состояния, например, света, газа, жидкости или системы тел таковы, что они минимизируют некоторые функции состояния этих объектов. Так, Пьер Ферма предположил, что между двумя точками пространства свет распространяется таким образом, чтобы время распространения было минимальным (принцип Ферма). В конце XVII века был сформулирован ряд классических экстремальных задач естественнонаучного и математического содержания. Необходимость решать экстремальные задачи появилась в промышленности, экономике, военном деле; участие в их решении принимали едва ли не все видные математики своего времени.

В современном мире по-прежнему актуален поиск экстремальных значений функций и значений параметров, при которых они достигаются. Устойчивые навыки решения оптимизационных задач понадобятся будущим исследователям, инженерам, экономистам, решающим проблемы максимизации прибыли, выхода готовой продукции, минимизации издержек, вредных выбросов, экономии энергоресурсов и т. д. Большие данные (Big Data), которые накопило и продолжает накапливать человечество, также требуют оптимальной обработки адекватными методами [5]. В последние годы возникли и сейчас находятся в центре внимания многих математиков три направления: 1) большие экстремальные задачи, 2) негладкие экстремальные задачи, 3) задачи оптимизации в условиях неопределенности. Современные оптимизационные задачи содержат все более существенную долю предварительных исследований, необходимых для построения адекватной математической модели изучаемого явления.

Далеко не всегда оптимальными методами решения экстремальной задачи являются применяемые «в лоб» методы дифференциального исчисления. А иногда это оказывается невозможным. С появлением современной теории экстремальных задач математикам приходится все чаще иметь дело с функциями, которые не обладают производными или даже разрывные. В связи с этим возник выпуклый анализ, в котором специальный класс функций, называемых выпуклыми (пример: $f(x) = |x|$), исследуется без использования классических производных.

В связи со сказанным остро встает вопрос о подготовке специалистов, способных эффективно решать экстремальные задачи в конкретных условиях и целенаправленно искать наилучшие, желательно аналитические, методы их решения. Разумеется, школьников — будущих студентов, исследователей, инженеров, экономистов, управленцев — следует, убедив в их эффективности, «вооружить» математическими инструментами для решения оптимизационных задач различного содержания и уровня, в т. ч. без необоснованного использования производной. Их будущих учителей — студентов педагогов-математиков — надо научить методике «конструирования» и решения таких задач, методике обучения школьников их решению [5–8; 10; 12; 17; 22–27].

Вышесказанным определяется актуальность настоящей работы. Об актуальности исследования свидетельствует также, помимо задачи 12 «на экстремум», включение элементов экстремальных задач в другие задания ЕГЭ по математике (профильный уровень), например, задачу практического содержания [21]. Кодификатор-2017 требований к уровню подготовки выпускников … по математике, прямо указывает, что выпускник должен уметь «…решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения».

Целью работы является представление и обсуждение возможностей использования экстремальных свойств квадратичной функции в качестве мотивирующего инструмента решения оптимизационных задач и обучения их решению.

### Методический анализ

В задачниках по математике для основной общей школы (5-9 классы) нечасто встречаются интересные содержательные задачи по нахождению экстремальных (наибольших или наименьших) значений функции (см., напр. [1–3; 9; 11; 13–16; 18]). Ученики этого возраста почти не решают в классе подобные задачи, а знакомятся с ними лишь в выпускных классах при изучении основ дифференциального исчисления. Так, в учебниках под ред. Мордковича [15; 16] производная вводится во 2 полугодии 10 класса; в учебнике Никольского и др. [18] производная вводится в 1 полугодии 11 класса и т. д. Увы, к этому времени мотивация школьников к изучению математики бывает безвозвратно утеряна [6].

Добавим к сказанному, что систематическое изучение курса физики в 9 классе начинается с изучения механики (равномерное и неравномерное механическое движение, законы Ньютона, движение тел под действием различных сил и др.), см., напр., [19]. Глубокое понимание этих разделов физики без устойчивых навыков решения экстремальных задач едва ли возможно. Например, при решении задач типа: какова максимальная высота подъема тела, брошенного вертикально? какова максимальная дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту? как далеко съедут санки с горы при заданном коэффициенте трения? какова амплитуда колебаний маятника при заданной начальной скорости его движения? и т. п.

Изучение квадратичной функции в российских школах чаще всего начинается в 8 классе, но в некоторых учебниках эта тема рассматривается и в 7 классе. Так, в учебнике А. Г. Мордковича [13] вначале изучается линейная функция, ее график и основные свойства. Далее задается главный вопрос: «А не встречаются ли математические модели такого же плана, но такие, у которых $y$ выражается через $x$ не по формуле $y = kx + m$, а каким-то иным способом?». Только после этого начинается изучение квадратичной функции $y = x^2$ с помощью построения ее графика по точкам. В дальнейшем следует описание некоторых геометрических свойств параболы и основных понятий, а также описание свойств самой функции $y = x^2$. В завершение изучения темы в 7 классе предлагается вырезать из бумаги шаблон квадратичной функции и с помощью него осуществить решение некоторых задач.

В учебнике для 8 класса этого же автора [14] продолжается изучение квадратичной функции. В начале главы учеников знакомят с функцией $y = kx^2$. По точкам строятся графики функций $y = 2x^2$, $y = 0{,}5x^2$ и $y = -x^2$ и производится их сравнение. Рассматривается определение графика функции $y = kx^2$ и свойства самой функции. В следующем параграфе аналогичным образом изучается функция $y = k/x$. После этого автор переходит к разбору функции $y = ax^2 + bx + c$. Формулируется важная теорема о том, что график квадратичной функции можно получить из графика $y = ax^2$ с помощью параллельного переноса, и выводится формула для вычисления вершины параболы. Далее автор предлагает ученикам алгоритм, с помощью которого можно построить график параболы $y = ax^2 + bx + c$. Завершением главы является параграф о графическом решении квадратных уравнений. В 9 классе А. Г. Мордкович квадратичную функцию уже не рассматривает.

Рассмотрим учебник, авторами которого являются Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, М. В. Ткачева [1]. Изучение квадратичной функции авторы начинают в 8 классе. Соответствующая глава начинается со ссылки на материал 7 класса, в котором изучалась линейная функция. Далее приведены примеры квадратичных функций в различных областях науки и техники. Обобщением этому являются определение квадратичной функции, примеры и задачи. В следующем параграфе речь идет о функции $y = x^2$, строится ее график по точкам и рассматриваются основные свойства, аналогичным образом составлен следующий параграф, где говорится о функции $y = ax^2$. Здесь же выделено важное замечание о том, что в графике функции $y = ax^2$ при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ — вниз; затем перечислены свойства этой функции. Далее речь заходит о полной функции $y = ax^2 + bx + c$, о том, что графиком этой функции является парабола, полученная сдвигом $y = ax^2$ вдоль координатных осей. Выведены формулы координат вершины параболы, ось симметрии и направление параболы в зависимости от коэффициента $a$. Рассмотрение квадратичной функции заканчивается построением ее графика с помощью небольшой схемы, представленной в параграфе. Там же представлен важный факт о том, что функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает наименьшее и наибольшее значение в абсциссе вершины параболы, то есть в точке $x_0 = -b/(2a)$.

В учебнике А. С. Истер 2017 года [9] дается понятие квадратичной функции в 9 классе, но перед этим сначала изучаются общее понятие функции, свойства функции, область определения, область значений, график. И только после этого автор переходит к рассмотрению квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. В соответствующем параграфе даны определение этой функции, ее свойства, определена последовательность действий, которую следует соблюдать при построении графика $y(x)$. Ученикам предоставляется большое количество задач для решения. Затем начинается изучение темы, связанной с квадратичными неравенствами.

Изучение квадратичной функции А. Г. Мерзляк [11] начинает еще в 8 классе, рассматривая функцию $y = x^2$. Более полное изучение автор учебника по алгебре (2017 г.) предлагает ученикам в 9 классе. В главе 2 (§ 9) ученики знакомятся с функциональной зависимостью площади $S$ круга от его радиуса $r$, которая определяет квадратичную функцию $S(r) = \pi r^2$, являющуюся функцией вида $y = ax^2$. Затем автор показывает, как можно получить график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ из графика функции $y = ax^2$, давая схему построения, не использующую параллельных переносов. Далее идет ряд задач для повторения изученной темы.

Поиском наиболее эффективных педагогических путей изучения свойств квадратичной функции со школьниками разного уровня математической подготовленности, в частности, экстремальных свойств квадратичной функции, заняты не только отечественные педагоги, но и их зарубежные коллеги [25–27].

Так, в руководстве [27] подробно обсуждается тема квадратичных функций и операций над ними. Для начала рассматривается решение квадратичных уравнений и неравенств, а также их применение. После этого идет построение графиков квадратичных функций, разобраны основные понятия, свойства и рассмотрены задачи, решаемые с использованием квадратичной параболы. Авторы статьи [25] проводили эксперименты в школах с разными классами обучающихся (9–11 кл.). Для своих исследований они выбрали экстремальные задачи, которые ученики могли бы решить с разными уровнями обученности. В результате, школьники использовали множество различных методов для решения задач, применяя разные стратегии, в том числе и использование свойств квадратичной функции. Таким образом, по мнению авторов, различные решения для одной и той же задачи — это хорошая демонстрация связи между различными темами математики. В статье [26] авторами был осуществлен анализ международных стандартов и разработано межнациональное исследование для изучения того, как тема квадратичной функции вводится в четырех странах: Карибском бассейне, Китае, Турции и США. Стандарты были проанализированы в трех измерениях: содержание, математическое мышление и когнитивный уровень. Результаты показали, что все стандарты вводят основополагающие понятия квадратичных функций, однако с различными процедурными и концептуальными ожиданиями. В целом, принципы изучения темы (свойства и применения квадратичной функции) схожи с принципами, применяемыми в российских школах.

## Теория

Основной теоретический результат, необходимый для использования квадратичной функции в качестве инструмента решения экстремальных задач может быть сформулирован в виде следующей теоремы, доказательство которой вполне посильно обычному школьнику.

*Теорема*. Квадратный трехчлен $y(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ принимает свое экстремальное значение, при $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Это значение оказывается минимальным, $y_{\min}$, если $a > 0$; и максимальным, $y_{\max}$, если $a < 0$.

<u>Доказательство</u>: Выделим полный квадрат в квадратичном трехчлене:

$$y(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Так как выражение в скобках всюду неотрицательно и равно нулю лишь при $x_0 = -\frac{b}{2a}$, то при $a > 0$ функция $y(x)$ достигает своего наименьшего (минимального) значения, равного $y_{\min} = y(x_0) = c - \frac{b^2}{4a}$. Аналогично, при $a < 0$ функция $y(x)$ достигает своего наибольшего (максимального) значения, равного $y_{\max} = y(x_0) = c + \frac{b^2}{4|a|}$, что и требовалось доказать, ч. т. д.

Из теоремы об экстремуме квадратичной функции вытекают два важных следствия, широко употребимых при решении экстремальных задач.

*Следствие 1.* Пусть сумма двух положительных слагаемых $x$ и $y$ фиксирована; тогда их произведение $x \cdot y$ будет наибольшим, когда они равны.

Доказательство: Результат немедленно вытекает из очевидного тождества $x \cdot y = \frac{1}{4}[(x + y)^2 - (x - y)^2]$. По условию, сумма $S = x + y$ фиксирована. Произведение $x \cdot y$ будет наибольшим при наименьшем значении $(x - y)^2$, т. е. при $x = y$, ч. т. д.

*Следствие 2.* Пусть произведение $x \cdot y$ двух сомножителей фиксировано, тогда их сумма $x + y$ будет наименьшей, когда они равны.

Доказательство: Из тождества $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$ ясно, что $(x + y)^2$, а значит и $x + y$ будет наименьшим, если $x - y = 0$, т. е. $x = y$, ч. т. д.

Методом математической индукции следствия 1 и 2 можно обобщить на произвольное число слагаемых.

*Комментарий.* Приведенные доказательства просты, элегантны и, несомненно, обладают эстетической привлекательностью («математической красотой»), которая может быть оценена по достоинству не только «технарями», но и обучающимися гуманитарно-эстетической направленности. Представляется важным, чтобы подобные математические результаты были получаемы, обсуждаемы и постоянно применяемы при обучении математике на разных ступенях образования.

Для демонстрации широких возможностей «бездифференциального» решения прикладных экстремальных задач, что доступно и в основной общей школе, приведем следующую задачу «О футболисте».

*Задача 1.* Футболист с мячом бежит по кромке поля перпендикулярно линии ворот (рис. 1). Из какой точки поля он должен ударить в сторону ворот, чтобы с наибольшей вероятностью поразить ворота противника?

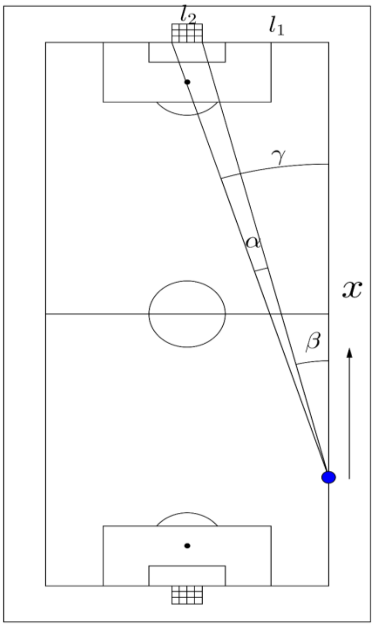


***Рис. 1. Модель футбольного поля***

Решение: Очевидно, наибольшая вероятность поражения ворот соответствует наибольшему углу, под которым нападающему видны ворота противника. Обозначим через $x$ — расстояние до границы поля по линии ворот; $l_1$ — расстояние от границы поля до ворот; $l_2$ — ширина ворот; β — угол между крайней полосой поля и правой штангой; γ — угол между крайней полосой поля и левой штангой (рис. 1). Тогда $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{x}{l_1+l_2}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{x}{l_1}$ и угол, под которым видны ворота, равен $\alpha = \gamma - \beta$. Найдем котангенс угла α:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\gamma - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma} = \frac{\frac{x}{l_1+l_2}\cdot\frac{x}{l_1}+1}{\frac{x}{l_1}-\frac{x}{l_1+l_2}} = \frac{x^2+l_1(l_1+l_2)}{l_1 x} = \frac{1}{l_1}\left(x + \frac{l_1(l_1+l_2)}{x}\right).$$

Чтобы ворота были видны под наибольшим углом, котангенс угла α должен быть наименьшим. Произведение слагаемых в круглых скобках равно $l_1(l_1 + l_2)$ — постоянно, т. е. не зависит от $x$. Поэтому по следствию 2 из теоремы заключаем, что наименьшее значение ctg α принимает равенстве слагаемых, т. е. при $x_0 = \sqrt{l_1(l_1 + l_2)}$.

Проведем численную оценку. Подставив

рекомендуемые ФИФА размеры элементов футбольного поля 105 × 68 м, $l_1 = 30{,}34$ м, $l_2 = 7{,}32$ м, получим: $x_0 = \sqrt{l_1(l_1 + l_2)} = \sqrt{30{,}34(30{,}34 + 7{,}32)} = 33{,}80$ м.

Ответ: $x_0 = \sqrt{l_1(l_1 + l_2)}$. Для размеров реального поля $x_0 = 33{,}80$ м.

*Комментарий*: Помимо очевидного прикладного характера данной задачи, которая вполне годится как элемент теоретической подготовки игроков, задача широко задействует внутрипредметные связи самой математики (с геометрией и тригонометрией). Важным элементом также является возможность численной оценки и оценка ее реалистичности. Как показывает опыт, последнее часто проблематично для обучающихся.

Приведем (без решения) пример еще одной прикладной задачи, решаемой средствами «бездифференциальной» оптимизации.

*Задача 2*. Беспилотная грузовая самоходная тележка может двигаться равноускорено с постоянным ускорением $a$, равномерно со скоростью $v_0$ и равнозамедленно с тем же по модулю ускорением. Найдите график движения, обеспечивающий минимальное время доставки груза на прямолинейном участке пути длиной $\ell$.

*Комментарий*: Данная междисциплинарная задача является моделью реальной проблемы оптимальной организации беспилотной перевозки грузов по заданному маршруту. Оптимальное решение не только может быть найдено без применения производной, а лишь за счет использования известных законов равномерного и равноускоренного движения, но и реализовано на практике средствами робототехники.

Построение оптимизируемых математических моделей и решение оптимизационных задач с помощью экстремальных свойств квадратичной функции можно успешно применять в проектной деятельности школьников. Такие задачи, будучи правильно подобранными, вполне способны также нести серьезную профессионально ориентирующую функцию.

## Результаты и обсуждение

Нами было подготовлено и проведено педагогическое исследование для оценки готовности студентов к творческому поиску путей решения предложенных экстремальных задач без использования производной, т. е. средствами, доступными обучающимся основной общей школы.

Студентам педагогам-математикам, обучающимся на 1 курсе УрГПУ (45 чел., очное отделение (о/о) и 28 чел., заочное отделение (з/о)) и студентам автодорожного колледжа 1 и 2 курса (32 чел.), для которых математика не является основным предметом, была предложена проверочная работа (ПР) из пяти экстремальных задач разного типа (пример варианта приведен в работе [23]). Почти все эти студенты недавно окончили школы, сдав при этом ЕГЭ (или ОГЭ), поэтому можно было ожидать, что школьные навыки решения экстремальных задач еще не были утеряны. Кроме этого, перед проведением ПР было проведено повторение данной темы (теорема, следствия из нее, примеры задач), так что обучающимся оставалось суметь правильно применить эти знания. Впрочем, «в крайнем случае» и исходя из приоритета безусловного достижения цели, студентам не возбранялось использовать стандартный поиск экстремума с помощью производной, но оценка при этом снижалась.

Результаты проверки решенных задач представлены в табл. и на диаграммах распределения (рис. 2). Проверка работы проводилась по бидихотомической модели оценивания («шкала $0–\frac{1}{3}–\frac{2}{3}–1$») [4]. Из диаграммы видно, что наиболее сложной для первокурсников о/о оказалась оптимизационная задача 5 экономического содержания, хуже других решена задача 4 «на относительное движение тел». Наиболее легкими для студентов были задачи общего (1) и геометрического (3) содержания, соответственно; несколько хуже студенты справились с исследованием на экстремум логарифмической функции (задача 2). Знания студентов з/о оказались более «ровными», хотя и здесь хуже других решены оптимизационные задачи «на геометрию», «на движение», «на экономику», т. е. задачи с привлечением внутренних связей различных разделов математики и межпредметных связей.

*Таблица*

**Распределение набранных баллов за решение задач ПР студентами УрГПУ**

| Номер задачи | Набранные баллы, о/о | Набранные баллы, з/о |
|---|---|---|
| 1 | 11 | 15,3 |
| 2 | 8,7 | 13 |
| 3 | 10,7 | 10,3 |
| 4 | 6,7 | 11 |
| 5 | 1 | 10 |

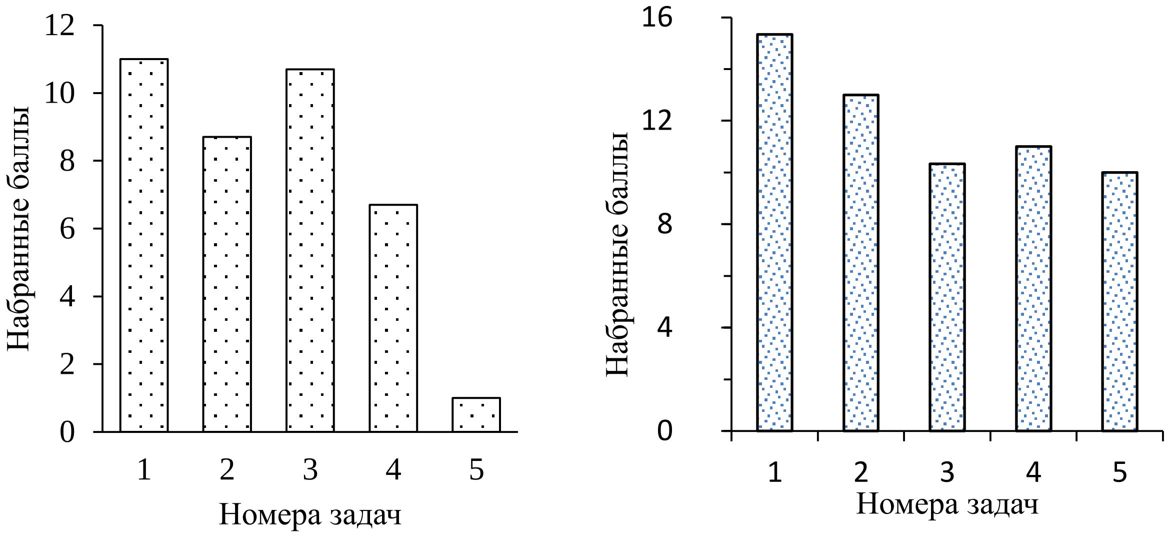


**Рис. 2. Распределение набранных баллов за решение задач проверочной работы студентами педагогами-математиками УрГПУ (1 к., о/о (слева) и з/о (справа))**

Некоторые студенты все же не смогли обойтись без использования производной при решении задач. Однако, как показала проверка и последующее неформальное обсуждение, большинство студентов в достаточной мере усвоили данную тему и могут применять экстремальные свойства квадратичной параболы при решении оптимизационных задач. Студенты отметили интерес к этой теме и предложили возможные варианты включения решения экстремальных задач в формате учебной и внеучебной (проектной) учебно-исследовательской деятельности школьников. Есть основания заключить, что в целом студенты УрГПУ достаточно уверенно владеют математическим аппаратом исследования функций на экстремум как с помощью производной, так и с помощью экстремальных свойств квадратичной функции. Это позволяет студентам решать оптимизационные задачи широкого спектра уровней сложности и дает основания считать, что выпускники УрГПУ смогут увлечь этими задачами своих будущих учеников. На основе шаблонов приведенных задач студенты также научились конструировать новые экстремальные задачи и решать их. Проделанная работа, несомненно, придала импульс формированию и развитию их профессиональных педагогических компетенций. Дальнейший прогресс связан с более широким и глубоким привлечением внутренних связей разных разделов самой математики и ее межпредметных связей с другими дисциплинами естественнонаучного и социально-экономического блока.

Результаты студентов колледжа ожидаемо оказались заметно скромнее: ни одни студент не справился с 4-5 задачами, с 3 задачами справились 2 студента, 2 задачи решили 5 студентов, 1 задачу решили 15 студентов и ни одной задачи не решили 10 студентов. Справедливым будет заключить, что студенты колледжа все же владеют основными приемами исследования функций, хотя и в меньшем объеме, чем студенты-математики. И здесь студенты отметили интерес, который у них вызвал процесс осмысления, построения математических моделей и решения экстремальных задач.

## Заключение

В статье подробно рассмотрена возможность применения экстремальных свойств квадратичной функции (параболы) для решения оптимизационных задач без преждевременного и/или необоснованного использования производной. Отмечено, что экстремальные свойства квадратичной функции не только позволяют эффективно и неформально решать достаточно сложные оптимизационные задачи, но и заметно повышают уровень мотивации обучающихся к изучению математики, в т. ч. обучающихся гуманитарно-эстетической направленности, к числу которых можно отнести студентов-педагогов. В целом, бакалавры педагоги-математики в удовлетворительной степени готовы использовать методы «бездифференциального» решения оптимизационных задач в своей будущей профессиональной деятельности, в частности, при руководстве проектной деятельностью школьников. При обучении студентов-математиков УрГПУ следует уделить повышенное внимание решению экстремальных междисциплинарных задач геометрического, физического, экономического и иного практикоориентированного содержания.

**Л И Т Е Р А Т У Р А**

1. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров [и др.]. — М. : Просвещение, 2012. — 255 с.

2. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович [и др.] ; под ред. Г. В. Дорофеева. — М. : Просвещение, 2010. — 304 с.

3. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова ; под ред. С. А. Теляковского. — М. : Просвещение, 2009. — 271 с.

4. Бодряков В. Ю., Фомина Н. Г. Простая вероятностно-статистическая модель количественной оценки уровня знаний учащихся // Alma mater (Вестник высшей школы). — 2008. — № 7. — С. 55–61.

5. Бодряков В. Ю., Быков А. А. Методические подходы к обучению студентов направления «Прикладная математика и информатика» основам интеллектуальной обработки Больших Данных // Педагогическое образование в России. — 2016. — № 7. — С. 145–152.

6. Бодряков В. Ю., Воронина Л. В. Проблемы качества математического образования в педагогическом вузе и пути их решения // Педагогическое образование в России. — 2018. — № 2. — С. 15–27.

7. Буслаева И. П. Решение экстремальных задач без использования производной // Математика в школе. — 1995. — № 5. — С. 67–70.

8. Габасов Р. Ф. Экстремальные задачи в современной науке и приложениях [Электронный ресурс] // Соросовский образовательный журнал. — 1997. — № 6. — С. 115–120. — Режим доступа: http://www.pereplet.ru/obrazovanie/stsoros/352.html (дата обращения: 07.06.2018).

9. Истер А. С. Алгебра : учебн. для 9-го кл. общеобразоват. учеб. завед. — Киев : Генеза, 2017. — 264 с.

10. Кузовкова А. А., Мамалыга Р. Ф., Бодряков В. Ю. Формирование познавательного интереса к математике у обучающихся в классах гуманитарно-эстетической направленности // Математика в школе. — 2018. — № 2. — С. 35–42.

11. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Алгебра : учеб. для 9 кл. общеобразоват. учеб. заведений. — Х. : Гимназия, 2017. — 272 с.

12. Михайлов Е. А. Задачи оптимизации в школе [Электронный ресурс] // Библиотека «МГУ-школе». — Режим доступа: http://lib.teacher.msu.ru/pub/3021 (дата обращения: 14.04.2018.

13. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс. Часть 1 : учебник. — М. : Мнемозина, 2013. — 175 с.

14. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс. Часть 1 : учебник. — М. : Мнемозина, 2010. — 221 с.

15. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. Часть 1 : учебник (базовый уровень). — М. : Мнемозина, 2009. — 399 с.

16. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. Часть 2 : Задачник (базовый уровень). — М. : Мнемозина, 2009. — 239 с.

17. Натансон И. П. Простейшие задачи на максимум и минимум. — М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. — 32 с.

18. Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н., Шевкин А. В. Алгебра и начала анализа. 11 класс : учебник (базовый и профильный уровни). — М. : Просвещение, 2009. — 464 с.

19. Перышкин А. В., Гутник Е. М. Физика, 9 кл. : учебник. — М. : Дрофа, 2017. — 319 с.

20. Прохорова О. М. К истории теории экстремальных задач : дис. … канд. физ.-мат. наук. — М., 1993. — 175 с.

21. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика (профильный уровень) [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 14.04.2018).

22. Тихомиров В. М. Рассказы о максимумах и минимумах. — 2-е изд. — М. : МЦНМО, 2006. — 200 с.

23. Ударцева Д. А., Бодряков В. Ю. «Конструирование» и решение задач оптимизации с использованием экстремальных свойств квадратичной функции как способ развития творческих математических способностей учащихся основной общей школы // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. — 2018. — № 1. — С. 179–187.

24. Шор Н. З., Стеценко С. И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. — Киев : Наукова Думка, 1989. — 209 с.

25. Tünde Kántor, András Kovács. First steps in cooperative learning [Electronic resourse]. — Mode of access: http://math.ku.sk/data/portal/data/zbornik2007/Articles/Kantor_Tunde-Kovacz_Andras.pdf (date of access: 14.04.2018).

26. Tuyin An, Alexia Mintos, Melike Yigit. A cross-national standards analysis: quadratic equations and functions [Electronic resourse]. — Mode of access: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG11/WG11_Yigit.pdf (date of access: 14.04.2018).

27. Quadratic Functions and Operations on Functions [Electronic resourse]. — Mode of access: https://www.nsd.org/site/handlers/filedownload.ashx?moduleinstanceid=75350&dataid=74981&FileName=PC%20CH3%20Student%20Ed.pdf (date of access: 14.04.2018).

**R E F E R E N C E S**

1. Algebra. 8 klass : ucheb. dlya obshcheobrazovat. uchrezhdeniy / Sh. A. Alimov, Yu. M. Kolyagin, Yu. V. Sidorov [i dr.]. — M. : Prosveshchenie, 2012. — 255 s.

2. Algebra. 9 klass : ucheb. dlya obshcheobrazovat. uchrezhdeniy / G. V. Dorofeev, S. B. Suvorova, E. A. Bunimovich [i dr.] ; pod red. G. V. Dorofeeva. — M. : Prosveshchenie, 2010. — 304 s.

3. Algebra. 9 klass : ucheb. dlya obshcheobrazovat. uchrezhdeniy / Yu. N. Makarychev, N. G. Mindyuk, K. I. Neshkov, S. B. Suvorova ; pod red. S. A. Telyakovskogo. — M. : Prosveshchenie, 2009. — 271 s.

4. Bodryakov V. Yu., Fomina N. G. Prostaya veroyatnostno-statisticheskaya model' kolichestvennoy otsenki urovnya znaniy uchashchikhsya // Alma mater (Vestnik vysshey shkoly). — 2008. — № 7. — S. 55–61.

5. Bodryakov V. Yu., Bykov A. A. Metodicheskie podkhody k obucheniyu studentov napravleniya «Prikladnaya matematika i informatika» osnovam intellektual'noy obrabotki Bol'shikh Dannykh // Pedagogicheskoe obrazovanie v Rossii. — 2016. — № 7. — S. 145–152.

6. Bodryakov V. Yu., Voronina L. V. Problemy kachestva matematicheskogo obrazovaniya v pedagogicheskom vuze i puti ikh resheniya // Pedagogicheskoe obrazovanie v Rossii. — 2018. — № 2. — S. 15–27.

7. Buslaeva I. P. Reshenie ekstremal'nykh zadach bez ispol'zovaniya proizvodnoy // Matematika v shkole. — 1995. — № 5. — S. 67–70.

8. Gabasov R. F. Ekstremal'nye zadachi v sovremennoy nauke i prilozheniyakh [Elektronnyy resurs] // Sorosovskiy obrazovatel'nyy zhurnal. — 1997. — № 6. — S. 115–120. — Rezhim dostupa: http://www.pereplet.ru/obrazovanie/stsoros/352.html (data obrashcheniya: 07.06.2018).

9. Ister A. S. Algebra : uchebn. dlya 9-go kl. obshcheobrazovat. ucheb. zaved. — Kiev : Geneza, 2017. — 264 s.

10. Kuzovkova A. A., Mamalyga R. F., Bodryakov V. Yu. Formirovanie poznavatel'nogo interesa k matematike u obuchayushchikhsya v klassakh gumanitarno-esteticheskoy napravlennosti // Matematika v shkole. — 2018. — № 2. — S. 35–42.

11. Merzlyak A. G., Polonskiy V. B., Yakir M. S. Algebra : ucheb. dlya 9 kl. obshcheobrazovat. ucheb. zavedeniy. — Kh. : Gimnaziya, 2017. — 272 s.

12. Mikhaylov E. A. Zadachi optimizatsii v shkole [Elektronnyy resurs] // Biblioteka «MGU-shkole». — Rezhim dostupa: http://lib.teacher.msu.ru/pub/3021 (data obrashcheniya: 14.04.2018.

13. Mordkovich A. G. Algebra. 7 klass. Chast' 1 : uchebnik. — M. : Mnemozina, 2013. — 175 s.

14. Mordkovich A. G. Algebra. 8 klass. Chast' 1 : uchebnik. — M. : Mnemozina, 2010. — 221 s.

15. Mordkovich A. G. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10–11 klassy. Chast' 1 : uchebnik (bazovyy uroven'). — M. : Mnemozina, 2009. — 399 s.

16. Mordkovich A. G. Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10–11 klassy. Chast' 2 : Zadachnik (bazovyy uroven'). — M. : Mnemozina, 2009. — 239 s.

17. Natanson I. P. Prosteyshie zadachi na maksimum i minimum. — M. : Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1950. — 32 c.

18. Nikol'skiy S. M., Potapov M. K., Reshetnikov N. N., Shevkin A. V. Algebra i nachala analiza. 11 klass : uchebnik (bazovyy i profil'nyy urovni). — M. : Prosveshchenie, 2009. — 464 s.

19. Peryshkin A. V., Gutnik E. M. Fizika, 9 kl. : uchebnik. — M. : Drofa, 2017. — 319 s.

20. Prokhorova O. M. K istorii teorii ekstremal'nykh zadach : dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. — M., 1993. — 175 s.

21. Reshu EGE. Obrazovatel'nyy portal dlya podgotovki k ekzamenam. Matematika (profil'nyy uroven') [Elektronnyy resurs]. — Rezhim dostupa: https://ege.sdamgia.ru/ (data obrashcheniya: 14.04.2018).

22. Tikhomirov V. M. Rasskazy o maksimumakh i minimumakh. — 2-e izd. — M. : MTsNMO, 2006. — 200 s.

23. Udartseva D. A., Bodryakov V. Yu. «Konstruirovanie» i reshenie zadach optimizatsii s ispol'zovaniem ekstremal'nykh svoystv kvadratichnoy funktsii kak sposob razvitiya tvorcheskikh matematicheskikh sposobnostey uchashchikhsya osnovnoy obshchey shkoly // Aktual'nye voprosy prepodavaniya matematiki, informatiki i informatsionnykh tekhnologiy. — 2018. — № 1. — S. 179–187.

24. Shor N. Z., Stetsenko S. I. Kvadratichnye ekstremal'nye zadachi i nedifferentsiruemaya optimizatsiya. — Kiev : Naukova Dumka, 1989. — 209 s.

25. Tünde Kántor, András Kovács. First steps in cooperative learning [Electronic resourse]. — Mode of access: http://math.ku.sk/data/portal/data/zbornik2007/Articles/Kantor_Tunde-Kovacz_Andras.pdf (date of access: 14.04.2018).

26. Tuyin An, Alexia Mintos, Melike Yigit. A cross-national standards analysis: quadratic equations and functions [Electronic resourse]. — Mode of access: http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG11/WG11_Yigit.pdf (date of access: 14.04.2018).

27. Quadratic Functions and Operations on Functions [Electronic resourse]. — Mode of access: https://www.nsd.org/site/handlers/filedownload.ashx?moduleinstanceid=75350&dataid=74981&FileName=PC%20CH3%20Student%20Ed.pdf (date of access: 14.04.2018).